

АСПАН МЕХАНИКАСЫ

*Дәріскер
ф.-м.ғ.к., асс.профессор Алимгазина Н.Ш.*

2-дәріс. Тартылыс теориясының негіздері

Ньютонның тартылыс заңы

1666 ж. -

“Натурал философияның математикалық негіздері”

Ньютон заңның тұжырымдасы: *кез келген екі материалдық бөлшек бір-біріне өздерінің массаларының (m_1, m_2) көбейтіндісіне тура пропорционал, ал арақашықтығының квадратына (r^2) кері пропорционал күшпен (F) тартылады:*

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1)$$

мұндағы G — гравитациялық тұрақты. Гравитациялық тұрақтының (G) сан мәнін 1798 ж. ағылшын ғалымы Г. Кавендиш анықтаған:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{H \cdot M^2}{KZ^2}.$$

m массасы бар M және μ массасы бар P материалдық нүктелерді евклид кеңістігінде қарастырайық. Осы материалдық нүктелер бір бірінен r арақашықтығында орналасқан. Егер M -ді тартылу центрі, ал P -ні - тартылатын нүкте ретінде қарастырсақ және оның массасы $\mu=1$ болса. Сонда бірлік массасы бар P материалдық нүктені M материалдық нүкте осындай тартылыс күшімен әсеретеді:

$$F = G \frac{m}{r^2}. \quad (2)$$

(1.1) мен (1.2) формулалар координат жүйесіне тәуелсіз.

O - координат басы кезкелген кеңістіктің нүктесінде орналасқан және осьтері тұрақты бағытталған тікбұрышты декарт координат жүйесін қарастырайық. P - тартылатын нүктенің координаттарын x', y', z' , ал M – тартылу нүктесінің координаттарын x, y, z ретінде белгілейміз. Сонда

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (3)$$

$$X = Gm \frac{x - x'}{r^3},$$

$$Y = Gm \frac{y - y'}{r^3},$$

$$Z = Gm \frac{z - z'}{r^3}.$$

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (4)$$

Күштік функция

$U(x, y, z) = U(P) = G \frac{m}{r}$ функцияны енгіземіз, оны дербес түрінде x координатасы бойынша дифференциалдайық

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -G \frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x' - x}{r}. \quad (5)$$

Сонда

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (6)$$

L кейбір бағытындағы күштің проекциясы

$$F_L = F \cos(F, L) = X \cos(L, x) + Y \cos(L, y) + Z \cos(L, z),$$

$$F_L = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(L, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(L, y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(L, z) = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (7)$$

ал дербес жағдайда – радиус вектор бағытындағы $\mathbf{P}$ нүктесіне әсерететін тартылыс күштің проекциясы

$$F_r = \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (8)$$

U - m массаның күштік функциясы немесе m нүктелік массаның потенциалы.

Күштік функцияның қасиеттері:

1. Бүкіл кеңістік бойынша $U(\mathbf{P})$ күштік функция шекті, бірімәнде және үздіксіз, тек $\mathbf{M}$ нүктесінде ол шексізге ұмтылады.
2. Егер $\mathbf{P}$ нүктесі $\mathbf{M}$ нүктесінен шексіз қашықтыққа орын ауыстыратын болса, $U(\mathbf{P})$ күштік функцияның мәні оң болса да шексіз төмендейді

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r \cdot U) = Gm \quad (9)$$

3. $U(\mathbf{P})$ күштік функцияның кез келген дәрежедегі барлық дербес туындылар $\mathbf{P}$ нүктесінің координатары бойынша бүкіл кеңістікте шекті, бірімәнді және үздіксіз болады.
4. Егер $\mathbf{P} \rightarrow \infty$ $U(\mathbf{P})$ күштік функцияның кез келген дербес туындысының шегі 0 болады

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -Gm \quad (10)$$

5. $\mathbf{M}$ нүктесінен басқа бүкіл кеңістікте $U(\mathbf{P})$ күштік функциясы осы теңдеуге сәйкес келеді

Лаплас теңдеуі

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (11)$$

Лаплас операторы

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (12)$$

Сонда $\nabla^2 U = 0$

$$\nabla U = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \text{div} F \quad (13)$$

$\vec{F}$ вектордың дивергенциясы немесе таралғыштығы.

Кеңістіктегі нүктелердің геометриялық орыны деңгейдің беті немесе изопотенциалдық бет деп аталады, егер осы орындарда күштік функциясы бір ғана C мәніне ие болса.

Деңгейдің беті осы теңдеу арқылы анықталады

$$U(x, y, z) = C \quad (14)$$

Осыға дейін біз тек екі (M, P) материалдық нүктелер бар және M – бекітілген нүкте, ал P -кеңістікте кез келеген орынға орналасуы мүмкін деп есептедік. Сол кезде U - күштік функция P нүктенің координаттар функциясы ретінде қарастырылды.

Бірақ кейбір жағдайларда екі материалдық нүкте тең әсерлі ретінде қарастыру қажет. m_1 массасы бар M_1 және m_2 массасы бар M_2 материалдық нүктелердің күштік функциясы

$$U = G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (15)$$

$$r = \overline{M_1 M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (16)$$

Күштік функция екі материалдық нүктенің алты координаттар функциясы ретіне алынады

$$U = U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$$

Тартылыс күштердің координаттар осьтеріне проекциялары

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial U}{\partial x_1} = Gm_1m_2 \frac{x_2 - x_1}{r^3}, & Y_1 &= \frac{\partial U}{\partial y_1} = Gm_1m_2 \frac{y_2 - y_1}{r^3}, & Z_1 &= \frac{\partial U}{\partial z_1} = Gm_1m_2 \frac{z_2 - z_1}{r^3}, \\ X_2 &= \frac{\partial U}{\partial x_2} = Gm_1m_2 \frac{x_1 - x_2}{r^3}, & Y_2 &= \frac{\partial U}{\partial y_2} = Gm_1m_2 \frac{y_1 - y_2}{r^3}, & Z_2 &= \frac{\partial U}{\partial z_2} = Gm_1m_2 \frac{z_1 - z_2}{r^3}. \end{aligned} \quad (17)$$

Осы кезде U – екі массаның күштік функциясы немесе m_1 және m_2 екі нүктелік массаларының өзара тартылыстың күштік функциясы.

Материалдық нүктелер жүйесінің күштік функциясы

Жүйенің n материалдық нүктелері $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ тартылыс центрлері ретінде қарастырайық.

M_i нүктенің массасын - m_i және OXYZ жүйдегі координаттарын - x'_i, y'_i, z'_i және бірлік массасы ($\mu=1$) бар, M_i нүктелерімен сәйкес келмейтін нүктені - $P(x, y, z)$ арқылы белгілейміз. Сонда

$$r_i = \sqrt{(x - x'_i)^2 + (y - y'_i)^2 + (z - z'_i)^2}. \quad (18)$$

P нүктенің M_i материалдық нүктелер жүйесі әсерінен тартылуын қарастырайық. M_i нүктесі P нүктесіне әсерететін тартылыс күштің координаттық осьтеріне проекциялары

$$X_i = Gm_i \frac{x'_i - x}{r^3}, \quad Y_i = Gm_i \frac{y'_i - y}{r^3}, \quad Z_i = Gm_i \frac{z'_i - z}{r^3}. \quad (19)$$

Сонда $\mathbf{P}$ нүктесіне әсерететін барлық тартылыс күштердің теңәрекетті күштің проекциясы

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n X_i = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{x'_i - x}{r_i^3}, \\ Y &= \sum_{i=1}^n Y_i = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{y'_i - y}{r_i^3}, \\ Z &= \sum_{i=1}^n Z_i = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{z'_i - z}{r_i^3}. \end{aligned} \quad (20)$$

$L(\alpha', \beta', \gamma')$ кейбір берілген бағытындағы теңәрекетті күштің проекциясы

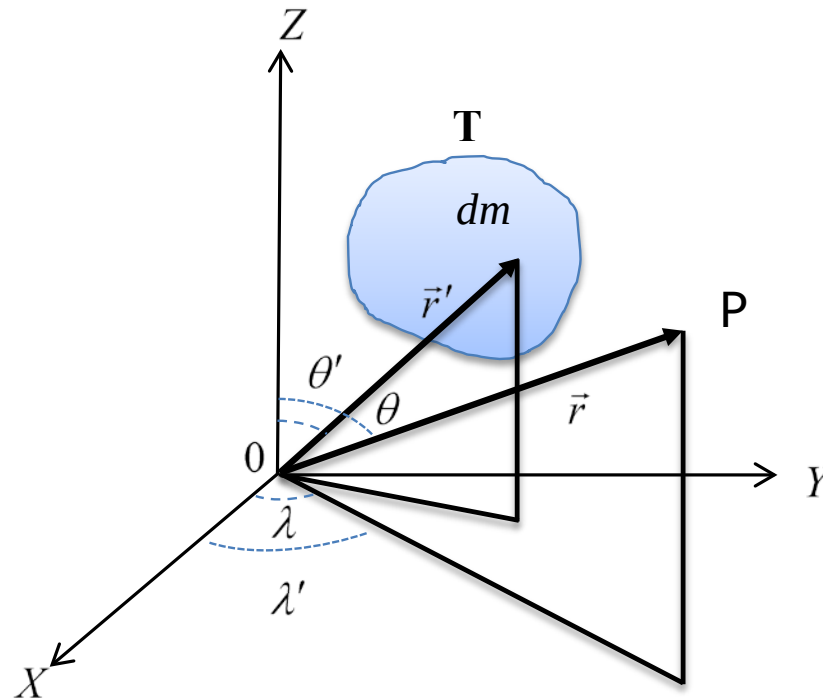
$$F_L = \sum_{i=1}^n F_{iL} = \sum_{i=1}^n (\alpha' X_i + \beta' Y_i + \gamma' Z_i) \quad (21)$$

n нүктелік массасы бар жүйенің күштік функциясы

$$U = \sum_{i=1}^n U_i, \quad U_i = G \frac{m_i}{r_i}. \quad (22)$$

Аспан денелерінің гравитациялық өрістері

M массасы және $\rho(\vec{r}')$ тығыздығы бар T дененің кеңістікте орналасуы x, y, z координаттарымен белгіленсін



Тартылыс күші потенциалды (тек қана тартылатын денелердің координаталарына тәуелді) болғандықтан, T дененің V гравитациялық потенциалын анықтаймыз.

$$\vec{F} = \text{grad}V \quad (1.23)$$

dv' көлемінде dm массасы бар дененің элементі $\vec{r}'$ радиус-векторы бар P нүктесіндегі потенциал

$$dV = G \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.24)$$

егер T дененің көлемі бойынша интеграл алып косинус теоремаларын қолданғанда

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi + \left(\frac{r'}{r} \right)^2}}. \quad (1.25)$$

$\psi - \vec{r}, \vec{r}'$ - радиус-векторлар арасындағы бұрыш.

(1.25)- ші формуладағы оң жағын Лежандр полиномдары арқылы жазамыз

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \psi) \left(\frac{r'}{r} \right)^n. \quad (1.26)$$

r, θ, λ сфералық координаталар арқылы *гравитациялық потенциалы*

$$\begin{aligned} V = \frac{G}{r} & \left[P_n(t) \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n(t') \left(\frac{r'}{r} \right)^n d\nu' + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t) \cos m\lambda \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \cos m\lambda' \left(\frac{r'}{r} \right)^n d\nu' + \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t) \sin m\lambda \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \sin m\lambda' \left(\frac{r'}{r} \right)^n d\nu' \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$R_{nm}(\varphi, \lambda) = \cos m\lambda P_n^m(\sin \varphi)$$

$$S_{nm}(\varphi, \lambda) = \sin m\lambda P_n^m(\sin \varphi)$$

Сфералық функциялар – себебі сфераның үстіндегі нүктенің орналасуына байланысты (ендік және бойлық беріледі)

n және m - жеке сфералық гармониканың дәрежесі мен реті

осында $t = \cos \theta$, $t' = \cos \theta'$, *Лежандр полиномдары*

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (1.28)$$

және қосылған *Лежандр функциялары*

$$P_n^m(t) = (-1)^m (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} (P_n(t)) \quad (1.29)$$

a - аспан дененің сызықтық өлшемі (жұлдыздың немесе планетаның экваториалдық радиусы) болса, сонда (1.27) формуланы $a^n M$ шамасына көбейтеміз және бөлеміз

$$J_n = \frac{1}{a^n M} \int \rho(\vec{r}') P_n(t') (r')^n dV' \quad (1.30)$$

қатардың *зоналдық коэффициенттері*.

- Зоналдық коэффициенттері λ бойлыққа тәуелсіз және параллельдерде 0 айналады.

$$C_n^m = \frac{2}{a^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \cos m\lambda' d\nu', \quad (1.31)$$

$$S_n^m = \frac{2}{a^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \sin m\lambda' d\nu'$$

- **секториалды гармоникалар** - θ полярлық арақашықтыққа тәуелсіз және меридиандарда 0 айналады.

Егер $m < n$ болса, параллель және меридианардың доғаларымен құрастырылған қисықсызықты трапецияларында 0 айналады. Сонда осы коэффициенттер **тессералдық** деп аталады.

Дененің, оны қоршаған кеңістіктегі, гравитациялық потенциалы

$$V(x, y, z) = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k} \left(\frac{a}{r} \right)^{2k} P_{2k}(\sin \varphi) \right)$$

$$V(\varphi, \lambda, r) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (C_{mn} \cos m\lambda + S \sin m\lambda) P_n^m(\sin \varphi).$$

Жұлдыздар мен планеталардың гравитациялық өрістері

Гравитациялық денелердегі тығыздықтың таралуының дербес жағдайларын қарастырайық.

1. *Егер массаның таралуы сфералық симметрия заңына бағынса:*

$$\rho(\vec{r}') = \rho(r')$$

Сонда барлық коэффициенттер 0 тең болады, тек қана $J_0=1$. Осы жағдайда дененің гравитациялық өрісі дененің масса центріне орналасқан M бірлік массасының өрісімен сәйкес келеді:

$$V = \frac{GM}{r}.$$

Мысалы: Күн немесе төменгі спектралдық кластағы жалғыз жұлдыздар (егер олардың ось бойынша айналу жылдамдығы аса жоғары болмаса).

2. *Егер гравитациялық өрісті денеден аса үлкен арақашықтықта қарастырсақ. Денелер материалдық нүктелер ретінде аламыз.*

$$V = \frac{GM}{r}.$$

1 кесте. Күн жүйесінің денелердің гравитациялық өрістері

Объект	$GM, \text{ см}^3 / \text{с}^2$	$J_n \cdot 10^6$				
		n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
Күн	$1,33 \cdot 10^{26}$	<10	-	-	-	-
Меркурий	$2,17 \cdot 10^{19}$	~-10	-	-	-	-
Шолпан	$3,25 \cdot 10^{20}$	~-4	-	-	-	-
Жер	$3,99 \cdot 10^{20}$	-1083	2,54	1,58	0,22	0,59
Марс	$4,30 \cdot 10^{19}$	-1959	30	-10	-6	-3
Юпитер	$1,27 \cdot 10^{23}$	-14733	-	-587	-	5
Сатурн	$3,79 \cdot 10^{22}$	-16479	-	-937	-	11
Уран	$5,8 \cdot 10^{21}$	-3352	-	-29	-	-
Нептун	$7,05 \cdot 10^{21}$	-3411	-	-50	-	-
Ай	$4,9 \cdot 10^{18}$	-206	-37	33	-5	-

2. Егер дене осьтік симметрия заңына бағынса:

$$\rho(\vec{r}') = \rho(r', \theta')$$

Осы жағдайда барлық секториалды мен тессералды гармоникалар 0 тең болады, ал гравитациялық потенциал зоналдық гармоникаларға ие болады:

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n P_n(t) \left(\frac{a}{r} \right)^n \right].$$

3. Егер массаның таралуы осьтік және экваториалдық жазықтыққа байланысты симметрия заңына бағынса (тығыздық – ендіктің жұп функциясы ретінде қарастырылса): барлық тақ зоналдық гармоникалар 0-ге тең болады. Гравитациялық потенциал

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_{2n} P_{2n}(t) \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \right].$$

3 пен 4 –ші пункт бойынша мысал ретінде газдық және сұйықтық денелерді алуға болады: ертегі спектралды кластағы тез айналатын жұлдыздар, қос жүйенің компоненттері, алып-планеталар. Қаттыденелі планеталар және олардың үлкен серіктеріне аз дәлділігімен орындалады.

Дененің қозғалысын қарастырған жағдайда міндетті түрінде қарастырып отырған уақыт аралығын ескеру қажет

Екі дене есебі

2.1 Екі дене есебінің жалпы шешімі

2.1.1 Екі дене есебінің теңдеулері

X, Y, Z инерциалды координат жүйесін дегі екі M_0 және M_1 денелерінің қозғалысын қарастырамыз. $m_0, \vec{R}_0$ - бірінші және $m_1, \vec{R}_1$ - екінші дененің массалары және радиус -векторлары. Осы материалдық нүктелердің қозғалыс теңдеулері

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{\vec{R}}_0 &= Gm_0m_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_0|^3}; \\ m_1 \ddot{\vec{R}}_1 &= Gm_0m_1 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_0 - \vec{R}_1|^3}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Осы теңдеулердің жалпы шешімін анықтау үшін Коши есебі бойынша: барлық радиус векторлардың және жылдамдық векторларының t_0 - бастапқы уақыт мезетінде және t_1 мен t_2 - уақыт кезеңдерінде мәндері белгілі болу қажет. Сол үшін *бастапқы шарттар*

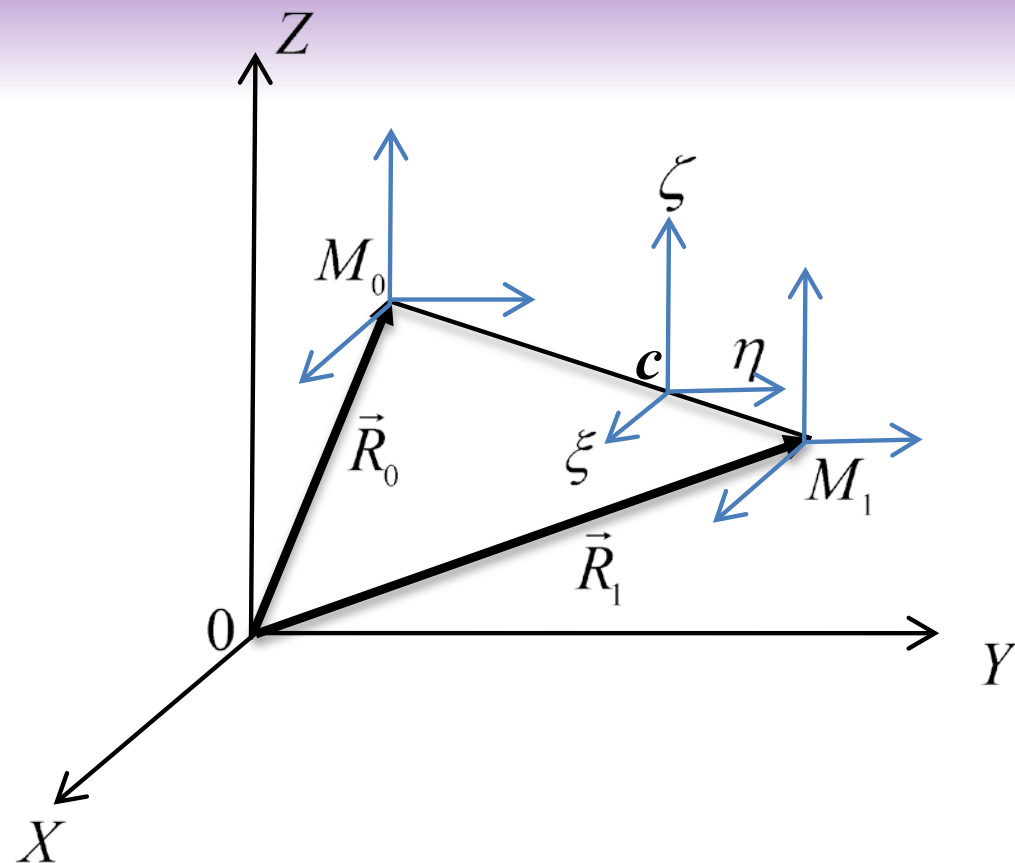
$$\vec{R}_{0,1}^{(0)} = \vec{R}_{0,1}(t_0), \quad \dot{\vec{R}}_{0,1}^{(0)} = \dot{\vec{R}}_{0,1}(t_0)$$

және *шеткі шарттар*

$$\vec{R}_{0,1}^{(1)} = \vec{R}_{0,1}(t_1), \quad \vec{R}_{0,1}^{(2)} = \vec{R}_{0,1}(t_2)$$

енгізіледі.

Екі дене есебі *барицентрлік* және *салыстырмалы* координат жүйесінде қарастырылады.



Инерциалды және барицентрлік координат жүйесіндегі
екі дене есебі

Барицентрлік координат жүйесінде екі дененің масса центрі ρ_0 және ρ_1 арақашықтықта M_0M_1 кесіндінің бойында орналасқан:

$$\begin{aligned}\rho_0 + \rho_1 &= |M_0M_1|, \\ m_1\rho_0 &= m_0\rho_1, \\ \vec{\rho}_0 &= \frac{m_1}{m_0 + m_1}(\vec{R}_0 - \vec{R}_1), \quad \vec{\rho}_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1}(\vec{R}_1 - \vec{R}_0).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Сонда қозғалыс теңдеулері

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{\rho}}_0 + \mu_0 \frac{\vec{\rho}_0}{\rho_0^3} &= 0; \\ \ddot{\vec{\rho}}_1 + \mu_1 \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^3} &= 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

μ_0, μ_1 - тұрақты шамалар

$$\mu_0 = \frac{Gm_1^3}{(m_0 + m_1)^2}, \quad \mu_1 = \frac{Gm_0^3}{(m_0 + m_1)^2}\tag{2.4}$$

Салыстырмалы координат жүйесіндегі екі дененің қозғалысын қарастырамыз. M_0 денесіне салыстырмалы M_1 денесінің радиус-векторын - $\vec{r}_{1/0}$ және M_1 денесіне салыстырмалы M_0 денесінің радиус -векторын - $\vec{r}_{0/1}$ белгілейміз. Сонда қозғалыс теңдеулері

$$\ddot{\vec{r}}_{1/0} + \mu \frac{\vec{r}_{1/0}}{r_{1/0}^3} = 0; \quad (2.5)$$

$$\ddot{\vec{r}}_{0/1} + \mu \frac{\vec{r}_{0/1}}{r_{0/1}^3} = 0; \quad (2.6)$$

μ - тұрақты шама

$$\mu = G(m_0 + m_1) \quad (2.7)$$

(2.5)-ші және (2.6)-ші формулалар бір біріне тәуелсіз, өйткені олар әртүрлі координат жүйесіне байланысты жазылған.

Сондықтан, екі дене есебінде үлкен дененің массасын M және кіші дененің массасын m арқылы белгілейміз. X, Y, Z координат жүйесіндегі m материалдық нүктенің M нүктесіне салыстырмалы қозғалысын қарастырамыз

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0; \quad \mu = G(m_0 + m_1). \quad (2.8)$$

Бастапқы шарттар

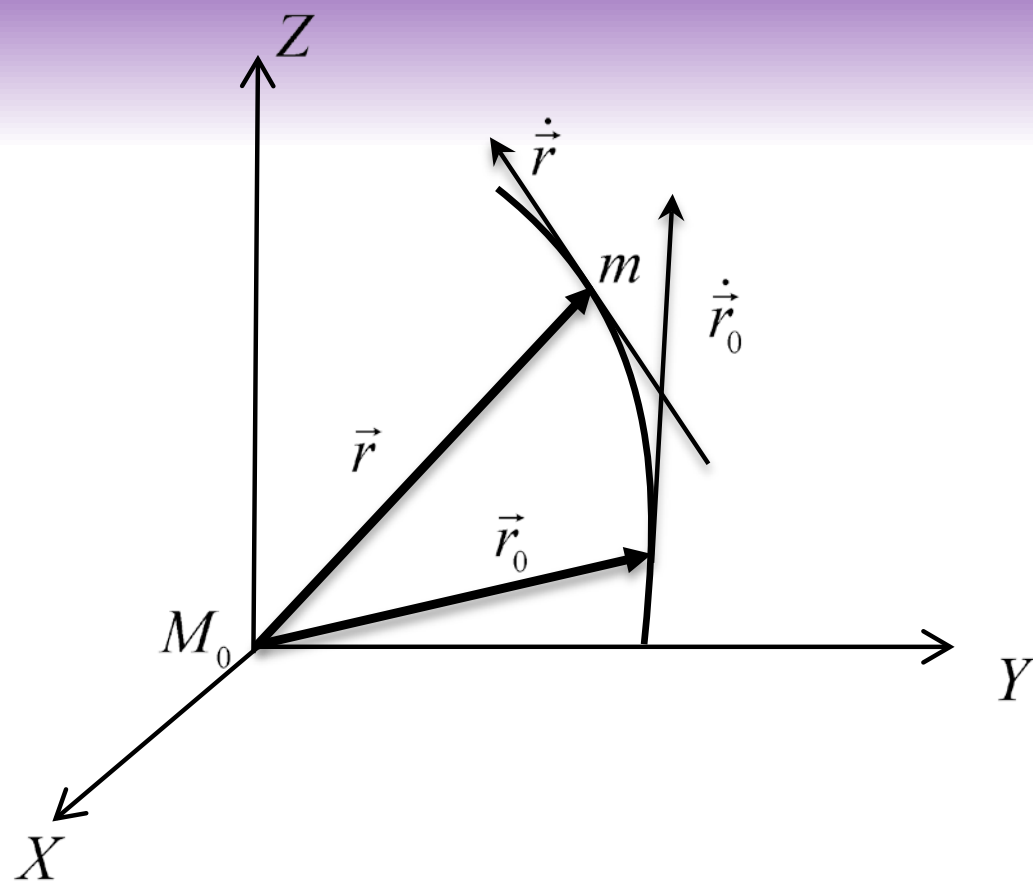
$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0).$$

μ - екі дене есебіндегі гравитациялық тұрақтысы. Күн жүйесіндегі денелердің қозғалысын қарастырған кезінде ұзындықты *астрономиялық бірліктерімен (а.б.)*, уақытты - *орташа күн тәулігімен*, массаны – *Күн массасының бөлігімен* өлшейміз. Сонда ***гравитациялық тұрақтысы***

$$G = 0.0029591,$$

Гаусс тұрақтысы

$$k = \sqrt{G} = 0.0172021.$$



Екі дененің салыстырмалы есебі

2.1.2 Екі дене есебінің бірінші интегралдары

Салыстырмалы қозғалысын қарастыратын болғандықтан *момент интегралын* және *энергия интегралын* енгізу қажет.

Егер

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0;$$

теңдеудің интегралын анықтаған кезінде

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \quad (2.9)$$

Сонда m нүктенің кинетикалық моменті сақталады, ал $\vec{c}$ - *интегралдау тұрақтысы* массаның бірлігіне есептелген моментіне тең. (2.9) – *ші формула момент интегралы.*

$\vec{r}$ - радиус-вектор және $\dot{\vec{r}}$ - оның бірінші туындысы $\vec{c}$ - момент векторына перпендикуляр орналасады. $\dot{r} - r$ шамасының өзгеру жылдамдығы, $\dot{\vec{r}}$ вектордың $\vec{r}$ вектор бағытындағы проекциясына тең және жылдамдық $V = |\dot{\vec{r}}|$ болғанда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (V^2) = -\frac{\mu}{r^2} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right),$$

теңдеудің интегралын анықтауға болады

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h \quad (2.10)$$

(2.10) формула сы — **энергия интегралы**. h — m нүктенің бірлік массасына келетін *екі еселенген жалпы энергия*.

Екі дене есебінде тағы бірінші интегралын қарастыру қажет. Егер

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{c} + \mu \frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{r^3} = 0;$$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{c} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{c});$$

$$\frac{\vec{r} \times \vec{r} \times \dot{\vec{r}}}{r^3} = \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} \times \vec{r}^2}{r^3} = -\frac{\vec{r}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right);$$

Лаплас интегралы

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{c} - \mu \frac{\vec{r}}{r} = \vec{\lambda}. \quad (2.11)$$

$\vec{\lambda}$ - Лаплас векторы.

$$\vec{c} \cdot \vec{\lambda} = \vec{c} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) - \mu \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{r^3} = 0, \quad (2.12)$$

$$\lambda^2 = hc^2 + \mu^2.$$